

30.10.

Další příklady

① Je dána fce $f(x) = x^2 \cdot e^{6-x}$.

Určete její D_f , limity v kraj.

bodech D_f , průsečíky s osami,
"graf".

$D_f = \mathbb{R}$, limity $\pm \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{6-x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\left[\begin{array}{l} 6-x \rightarrow +\infty \\ e^{6-x} \rightarrow +\infty \end{array} \right] \uparrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{6-x} = (+\infty) \cdot 0 \text{ NEJDE}$$

$$\left[\begin{array}{l} 6-x \rightarrow -\infty \\ e^{6-x} \rightarrow 0 \end{array} \right] \uparrow$$

Pomocí L'Hospitala:

$$\text{Převodeme na podíl: } x^2 \cdot e^{6-x} = \frac{x^2}{e^{x-6}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \Rightarrow x-6 \rightarrow +\infty \\ \Rightarrow e^{x-6} \rightarrow +\infty \end{array} \right] \Rightarrow \text{bez nutí L'Hosp.}$$

②

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-6}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-6}} \stackrel{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-6}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Průsečíky s osami:

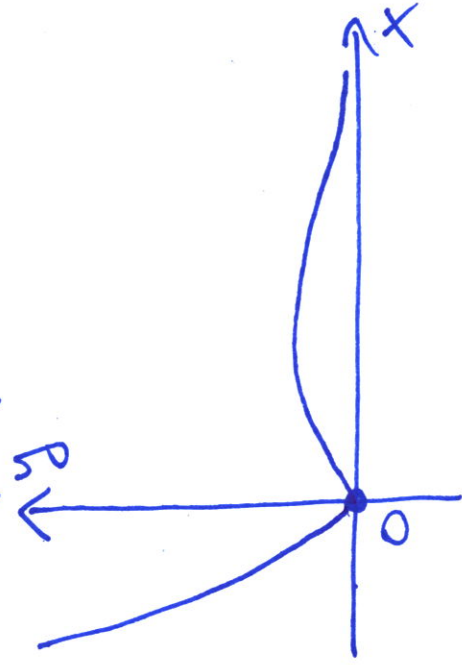
$$P_y: f(0) = 0, P_y = [0, 0]$$

$$P_x: x^2 \cdot e^{6-x} = 0$$

víme: $e^{6-x} > 0$ a proto

$$\text{musí být } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P_x = [0, 0]$$

Existence véc: zakresline
do grafu:



Zkoumání fce:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ e^{6-x} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ pouze pro } x=0 \end{array} \right\}$$

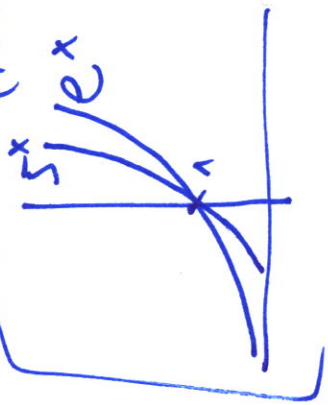
$\Rightarrow f(x)$ je kladná všude kromě
bodu 0.

② Jed. daná fce $f(x) = \frac{x}{5^x}$

Určete D_f , limity, průsečíky, graf.

$$D_f: \text{níme } 5^x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

(ve jmenov. není nikdy 0)



$$\text{níme } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 0$$

Limity $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^x \cdot \ln 5} = \frac{1}{(+\infty) \cdot \ln 5} = 0$$

($\ln 5$ je číslo!) $= 0$

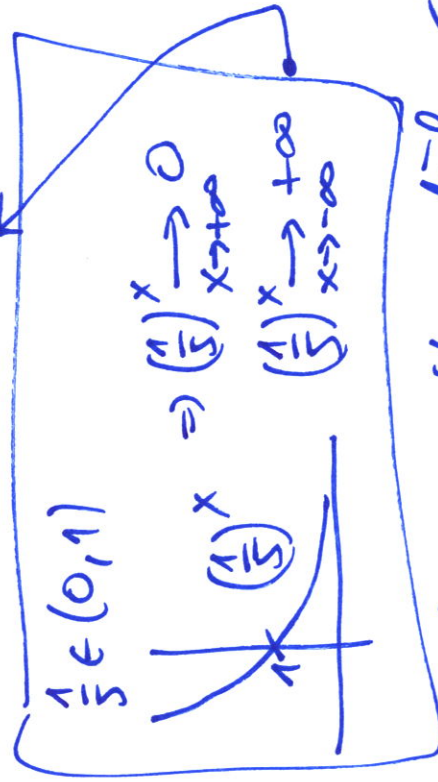
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5^x} = \frac{-\infty}{0} \text{ nejde}$$

a nejde použít ani L'Hospital!
(neříkáme (a1) ani (a2))

Jak tedy spočítat $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5^x}$?

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x =$$

$$= (-\infty) \cdot (+\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$$



b) lze použít i dělení
kladnou/zápornou mocninou:

$$\begin{array}{l} x \rightarrow -\infty \\ 5^x \rightarrow 0 \\ 5^x > 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x \rightarrow -\infty \\ 5^x \rightarrow 0 \\ 5^x > 0 \end{array}} \right\} \rightarrow 5^x \rightarrow 0^+$$

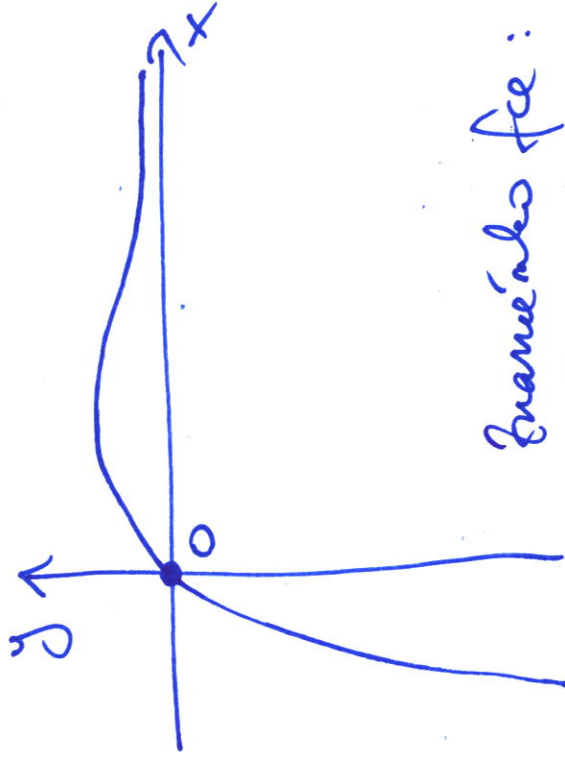
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5^x} = \frac{-\infty}{0^+} = (-\infty) \cdot (+\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$$

Průběh γ osami:

$$P_\gamma: f(0) = \frac{0}{5^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$P_x: f(x) = \frac{x}{5^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{tedy } P_x = P_\gamma = [0, 0]$$



Znaménko fce:

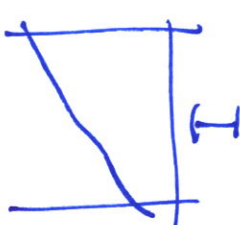
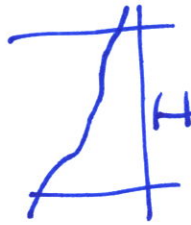
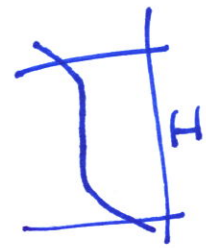
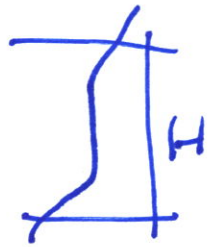
$$5^x > 0 \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{proto } x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

Vztah derivace a monotonie fce

Def: uvažujme fce $f(x)$ na intervalu I (otevřený, uzavřený, ...); řekneme, že fce f je na intervalu I :

- rostoucí, pokud
 $x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

- klesající, pokud
 $x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

- neklesající, pokud
 $x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

- nerostoucí, pokud
 $x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$


Pozn: f rostoucí v $I \Rightarrow f$ nekles. v I
• f klesající v $I \Rightarrow f$ nerost. v I

(tyto implikace nelze otočit)

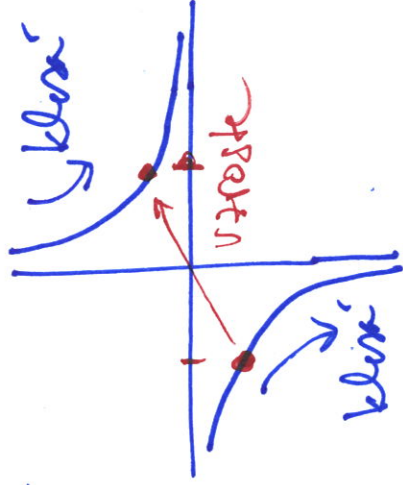
- f nekles. a nerost. v $I \Leftrightarrow f$ je konstantní v I
 $\Leftrightarrow f$ je konstantní v I

Def: f je monotónní v I ,
je-li v I nekles. nebo rost.
• f je ryze monotónní v I ,
je-li v I rost. nebo kles.

Pozn: "fce rost. / kles. v I "

Pozn: monotonie se vždy
vztahuje k intervalu
míst. ke složitějším množ.
jeho sledujeme intervalu!

$$\mathbb{R}^-: f(x) = \frac{1}{x}$$



$$D_f = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$$

Lze říci: $\frac{1}{x}$ klesá v $\mathbb{R}_-$
a také $\frac{1}{x}$ klesá v $\mathbb{R}_+$

Někde říci, že by $\frac{1}{x}$ klesala
v celém $\mathbb{R} - \{0\}$? $\mathbb{R} - \{0\}$
nemá interval.

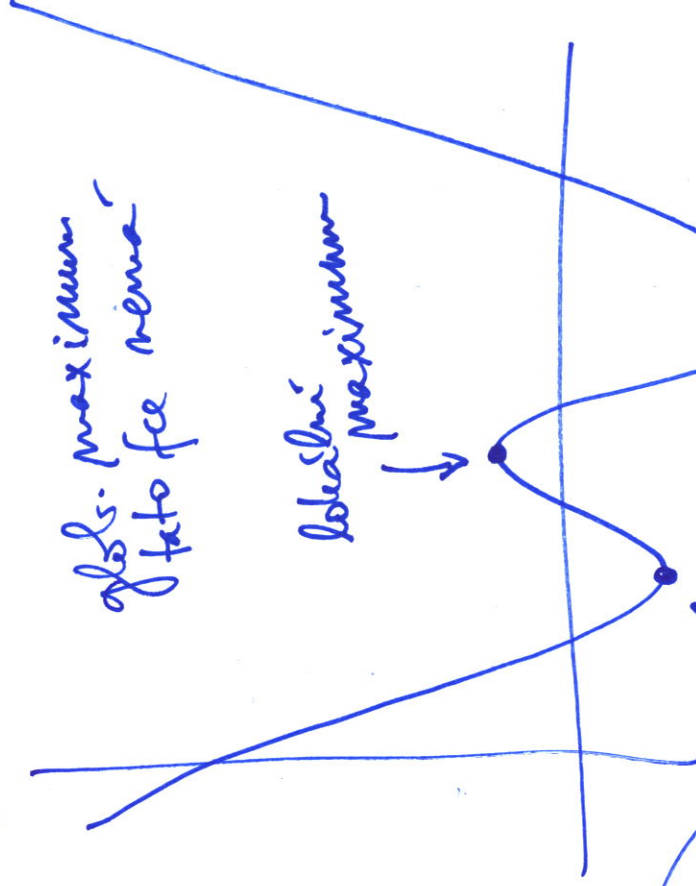
Def: lokalní maximum/minimum

maí fce f v bodě $x_0 \in D_f$, pokud
je hodnota $f(x_0)$ nejvyšší/nejnižší
hodnotou v rámci nějakého okolí

bodu x_0

Globální maximum/minimum

je nejvyšší/~~že~~ nejvyšší - hodnota
fce f v celém D_f .



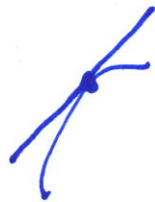
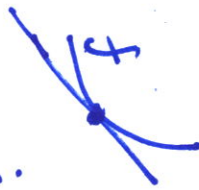
lokální minimum
globální minimum

Glob./lok. maximum/minimum
extrem

Pozn: v extrém se mění
rostončí charakter fce
na klesající či naopak,
nebo je to krajní bod Df.
(uz. intervalu)

Jak souvisí monotonie s derivací?
Už víme, co se děje v 1 bodě:
necht' $x_0 \in D_f$, necht' existuje
koněčná derivace $f'(x_0)$.
Pak jsou 3 možnosti:

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ tečna v bodě x_0 je rostončí
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ je klesající
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ tečna v x_0 je vodorovná



Def: bod $x_0 \in D_f$ je stacionární bod
fce f, pokud existuje $f'(x_0)$ a je rovna 0.

Věta (vztah derivace fce a monotonie
fce v intervalu):

- je-li $f'(x) > 0$ pro $\forall x \in I$,
pak f je rostončí v I,
- je-li $f'(x) < 0$ pro $\forall x \in I$,
pak f je klesající v I,
- je-li $f'(x) = 0$ pro $x \in I$,
pak f je konstantní v I

Úvaha: Má-li fce f v bodě
 x_0 lok. extrém, a existuje-li
 $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak nutně $f'(x_0) = 0$,
tj. x_0 je stacion. bodem fce f
a ~~ne~~ f v něm má vodorovnou
tečnu.

Tedy: pokud existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$,
pak platí

x_0 je lok. extrém fce f
 $\Downarrow$
 x_0 je stac. bod fce f

Opakem implikace neplatí!
 tj. stac. bod nemusí nutně
 být extrémem!

Pr: ① $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

hledáme její stacion. body:

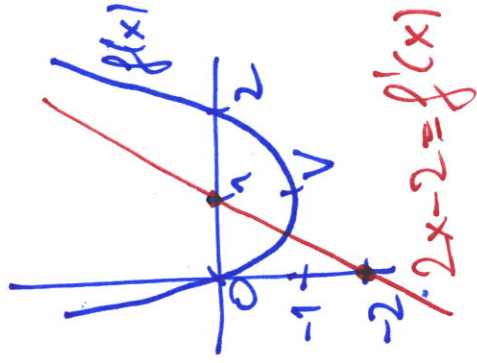
$$f'(x) = 2x - 2$$

položíme $2x - 2 = 0$

vyřešíme $x = \underline{1}$... stacion. bod

Je bod $x=1$ extrémem fce x^2-2x
 nebo není? U paraboly víme:
 vrchol V má x -ovou souřadnici
 $x_v = \underline{1}$, jde o minimum

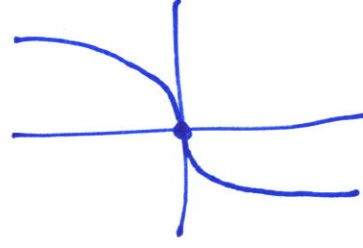
Tedy stac. bod
 $x=1$ je extrém
 (glob. minimum)



Je vidět: ~~$f''(x) > 0$~~
 $f' < 0 \Rightarrow f$ klesá
 $f' > 0 \Rightarrow f$ roste

② $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2 = 0$

stac. bod $x = \underline{0}$



ale bod $x=0$ není
 extrém fce x^3 !

f roste n celém $\mathbb{R}$?